

Lückentext (Mathematik II) zum Wintersemester 2012/13

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

*Mit diesem Lückentext können Sie bis zu maximal 10 mögliche Zusatzpunkte erlangen.
Für jedes richtig eingetragene Wort ergibt sich somit ein Bonuspunkt.*

Eine Äquivalenzrelation und eine Ordnungsrelation müssen beide immer _____ und reflexiv sein. Sie unterscheiden sich nur im Bereich der _____.

Handelt es sich bei der zu untersuchenden Reihe um eine sogenannte Potenzreihe, so existiert ein zusätzlicher _____ und man bestimmt den _____.

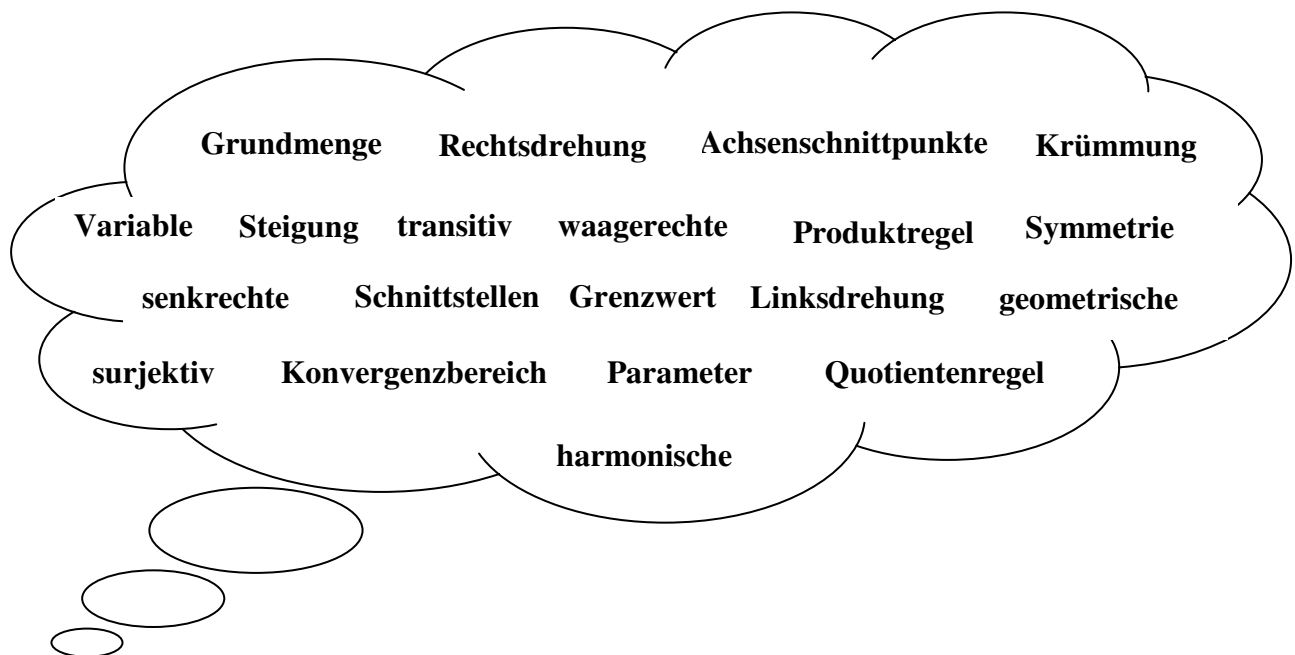
Die kleinste nicht konvergente Reihe nennt man auch _____ Reihe.

Bildet man für eine Funktion den Grenzwert gegen eine konstante Zahl und kommt als Ergebnis unendlich heraus, so liegt eine _____ Asymptote vor.

Mit der 2. Ableitung bestimmt man die _____, d.h. ist die 2. Ableitung negativ, so liegt an diesem Punkt eine _____ vor.

Damit man die Fläche zwischen zwei Funktionen ermitteln kann, berechnet man im ersten Schritt die _____ und erhält somit die Integrationsgrenzen.

Die partielle Integration entspricht der _____ der Differentialrechnung.



Lückentext (Mathematik II) zum Wintersemester 2012/13

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

*Mit diesem Lückentext können Sie bis zu maximal 10 mögliche Zusatzpunkte erlangen.
Für jedes richtig eingetragene Wort ergibt sich somit ein Bonuspunkt.*

Eine Äquivalenzrelation und eine Ordnungsrelation müssen beide immer transitiv und reflexiv sein. Sie unterscheiden sich nur im Bereich der Symmetrie.

Handelt es sich bei der zu untersuchenden Reihe um eine sogenannte Potenzreihe, so existiert ein zusätzlicher Parameter und man bestimmt den Konvergenzbereich.

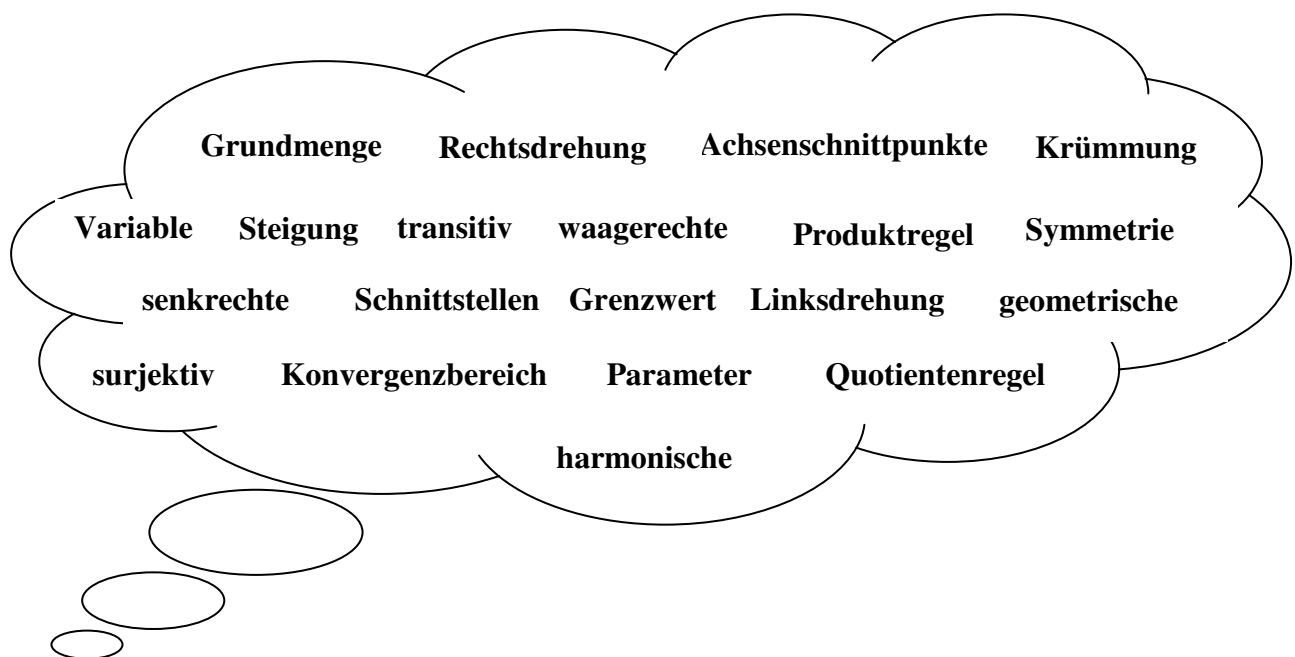
Die kleinste nicht konvergente Reihe nennt man auch harmonische Reihe.

Bildet man für eine Funktion den Grenzwert gegen eine Konstante Zahl und kommt als Ergebnis unendlich heraus, so liegt eine senkrechte Asymptote vor.

Mit der 2. Ableitung bestimmt man die Krümmung, d.h. ist die 2. Ableitung negativ, so liegt an der zugehörigen Stelle eine Rechtsdrehung vor.

Damit man die Fläche zwischen zwei Funktionen ermitteln kann, berechnet man im ersten Schritt die Schnittstellen und erhält somit die Integrationsgrenzen.

Die partielle Integration entspricht der Produktregel der Differentialrechnung.



Klausur (Mathematik II) - Wintersemester 2012/13

Name: _____

Matrikel-Nr: _____

E-Mail: _____ (optionale Schnell-Korrektur)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte	10	10	12	14	8	16	10	20

Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten sowie eigene Unterlagen zugelassen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen).
Bücher und elektronische Hilfsmittel sind nicht gestattet.

1. Gegeben ist die Menge $A = \{\text{Alle Kinder in einem Kindergarten}\}$.
Begründen Sie, ob es sich bei δ um eine Ordnungsrelation oder um eine Äquivalenzrelation handelt.

$$\delta = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{Kind } a \text{ ist jünger oder gleich alt wie Kind } b\}$$

2. Beweisen Sie, dass der folgende Term für alle $n \geq 0$ durch 9 teilbar ist.

$$10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$$

3. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{5 \cdot (x+5) - 10}{\sqrt{7-3x} - (1-x)} \right)$ auf zwei Arten, mittels

- a) Regel von L'Hospital.
b) Erweiterung durch das 3. Binom.

4. Geben Sie zu der Funktion $f(x) = \frac{2x^3 - 22x - 8x^2 + 60}{x^2 - 5x + 6}$ alle Asymptoten und die Schnittpunkte mit den Achsen an. Erstellen Sie eine grobe Skizze.

5. Bestimmen Sie die Fläche, die von der Funktion $f(x) = -3x^2 - 6x + 45$ und den beiden Achsen (x- und y-Achse) im positiven Quadranten eingeschlossen wird.

6. Die Folge a_n sei rekursiv gegeben mit $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot a_n^2 + 1}$; $a_1 = 4$ für $n \geq 1$.

Zeigen Sie:

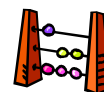
- a) Die Folge ist streng monoton wachsend oder fallend.
b) Die Folge besitzt eine obere und untere Schranke.
c) Die Folge ist konvergent.
d) Berechnen Sie den Grenzwert.

7. Begründen Sie die Konvergenz bei Aufgabe a) und berechnen in Aufgabenstellung b) den Wert der Reihe.

$$\text{a) } 42 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (1 + \sin(k^2))}{7 \cdot (2+k)^k} \quad \text{b) } 4 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{2k}} + 3 \cdot (k)^{-2} \right)$$

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \ln(\sqrt[3]{2-3x}) + 2x$.

- a) Bestimmen den Extrempunkt der Funktion und geben an ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.
b) Berechnen Sie das 3. Taylorpolynom $P_3(x, (-2))$ (ohne Fehlerabschätzung)
c) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an.



Noch viel leichter geht es nicht,
denn Geschenke bringt nicht nur der
Weihnachtsmann.



Musterlösung Klausur Mathematik II Wintersemester 2012-13

- 1) $\delta = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{Kind } a \text{ ist jünger oder gleich alt wie Kind } b\}$
 $\delta = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{Geburtsdatum}(a) \geq \text{Geburtsdatum}(b)\}$

reflexiv: $(a, a) \in \delta; a \in A$

Jedes Kind ist gleich alt wie es selbst

$$\text{Geburtsdatum}(a) \geq \text{Geburtsdatum}(a)$$

transitiv: $(a, b) \in \delta \wedge (b, c) \in \delta \Rightarrow (a, c) \in \delta; a, b, c \in A$

Wenn das erste Kind jünger als das zweite ist und das zweite Kind jünger als das dritte ist, dann muss auch das erste Kind jünger als das dritte sein.

$$\text{Geburtsdatum}(a) \geq \text{Geburtsdatum}(b) \geq \text{Geburtsdatum}(c)$$

antisymmetrisch: $(a, b) \in \delta \wedge (b, a) \in \delta \Rightarrow a = b; a, b \in A$

Wenn ein Kind gleichzeitig jünger und älter als ein zweites Kind ist, dann sind beide gleich alt.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Geburtsdatum}(a) \geq \text{Geburtsdatum}(b) \\ \text{Geburtsdatum}(b) \geq \text{Geburtsdatum}(a) \end{array} \right\} \text{Geburtsdatum}(a) \geq \text{Geburtsdatum}(a)$$

Es muss sich also um eine Ordnungsrelation handeln und wenn $(a, b) \notin \delta$ muss $(b, a) \in \delta$ gelten.

Also handelt es sich auch um eine totale Ordnungsrelation.

- 2) $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9 \cdot k \wedge k \in \mathbb{Z}$

Induktionsanfang:

$$n = 0: 10^0 + 3 \cdot 4^{0+2} + 5 = 54 = 9 \cdot 6 \Rightarrow 9 \cdot k \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} n = n + 1: & 10^{(n+1)} + 3 \cdot 4^{(n+1)+2} + 5 = 9 \cdot k \wedge k \in \mathbb{Z} \\ & 10 \cdot 10^n + 3 \cdot 4 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9 \cdot k \wedge k \in \mathbb{Z} \\ & (10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5) + 9 \cdot (10^n + 3 \cdot 4^{n+2}) = 9 \cdot k \wedge k \in \mathbb{Z} \\ & 9 \cdot k_1 + 9 \cdot k_2 = 9 \cdot (k_1 + k_2) = 9 \cdot k \wedge k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- 3) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{5 \cdot (x+5) - 10}{\sqrt{7-3x} - (1-x)} \right)$

a) L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{5 \cdot (x+5) - 10}{\sqrt{7-3x} - (1-x)} \right) = \lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{5x+15}{\sqrt{7-3x} - 1 + x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{5}{\frac{-3}{2 \cdot \sqrt{7-3x}} + 1} \right) = \left[\frac{5}{-\frac{3}{8} + 1} \right] = \left[\frac{5}{\frac{5}{8}} \right] = \left[5 \cdot \frac{8}{5} \right] = 8$$

b) 3. Binom:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{5x+15}{\sqrt{7-3x} - (1-x)} \cdot \frac{\sqrt{7-3x} + (1-x)}{\sqrt{7-3x} + (1-x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{(5x+15) \cdot (\sqrt{7-3x} + (1-x))}{(7-3x) - (1-x)^2} \right) \\ \lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{(5x+15) \cdot (\sqrt{7-3x} + (1-x))}{7-3x - (1-2x+x^2)} \right) &= \lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{5 \cdot (x+3) \cdot (\sqrt{7-3x} + (1-x))}{-x^2 - x + 6} \right) \\ \lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{5 \cdot (x+3) \cdot (\sqrt{7-3x} + (1-x))}{-(x+3) \cdot (x-2)} \right) &= \lim_{x \rightarrow (-3)} \left(\frac{5 \cdot (\sqrt{7-3x} + (1-x))}{-(x-2)} \right) = \left[\frac{5 \cdot (4+4)}{-(-5)} \right] = 8 \end{aligned}$$

$$4) \quad f(x) = \frac{2x^3 - 22x - 8x^2 + 60}{x^2 - 5x + 6}$$

$$f(x) = \frac{2 \cdot (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x-5)}{(x-3) \cdot (x-2)} = \frac{2 \cdot (x+3) \cdot (x-5)}{(x-3)} = \frac{2x^2 - 4x - 30}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - 4x - 30}{x-3} \right) = \frac{-30}{-1} = 30$$

⇒ behebbare Lücke bei (2/30)

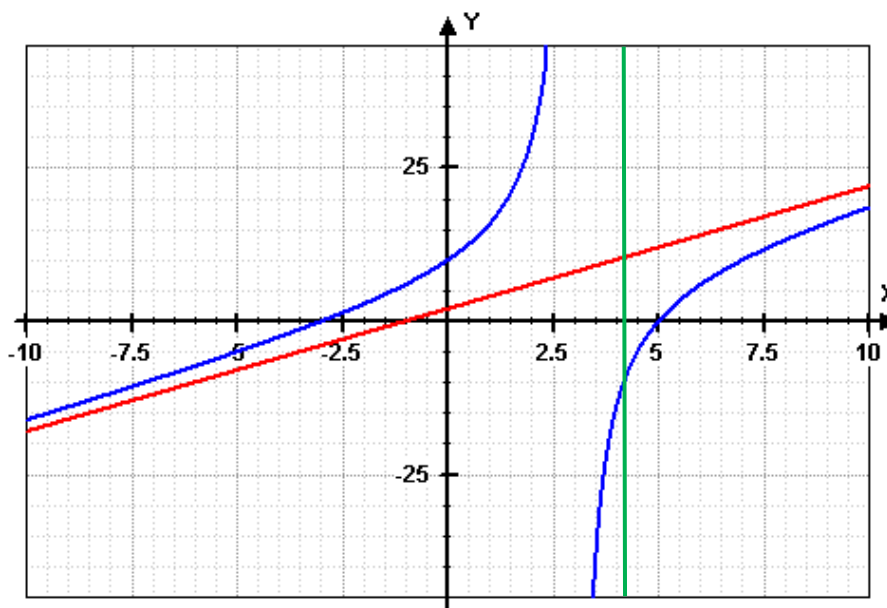
$$\lim_{x \rightarrow (\infty)} \left(\frac{2x^2 - 4x - 30}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow (\infty)} \left(\frac{x^2 \cdot \left(2 - \frac{4}{x} - \frac{30}{x^2}\right)}{x \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right)} \right) = \infty \quad \Rightarrow \text{diagonale Asymptote}$$

$$(2x^2 - 4x - 30) \div (x-3) = 2x + 2 - \frac{24}{x-3} \Rightarrow d(x) = 2x + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (3^+)} \left(\frac{2x^2 - 4x - 30}{x-3} \right) = \frac{-24}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (3^-)} \left(\frac{2x^2 - 4x - 30}{x-3} \right) = \frac{-24}{0^-} = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{senkrechte Asymptote}$$

$$S_y = (0/10); S_{x_1} = (-3/0); S_{x_2} = (5/0)$$

Skizze:



5) $f(x) = -3x^2 - 6x + 45$
 $f(x) = -3 \cdot (x^2 + 2x - 15) = -3 \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (-3x^2 - 6x + 45) dx \Rightarrow F(x) = -x^3 - 3x^2 + 45x$$

$$\left. \begin{array}{l} F(3) = -27 - 27 + 135 = 81 \\ F(0) = -0 - 0 + 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^3 (-3x^2 - 6x + 45) dx = 81$$

6) $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}a_n^2 + 1}; a_1 = 4 \Rightarrow a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 1} = \sqrt{9} = 3$

a) Monotonie: Behauptung: $a_{n+1} < a_n$ (streng monoton steigend)

Induktionsanfang:

$n = 1:$ $a_2 = 3 < 4 = a_1$

Induktionsschluss:

$n = n + 1:$ $a_{n+2} < a_{n+1}$

$$\sqrt{\frac{1}{2}a_{n+1}^2 + 1} < \sqrt{\frac{1}{2}a_n^2 + 1}$$

$$\frac{1}{2}a_{n+1}^2 + 1 < \frac{1}{2}a_n^2 + 1$$

$$\frac{1}{2}a_{n+1}^2 < \frac{1}{2}a_n^2$$

$$a_{n+1} < a_n$$

b) Schranken: Da die Folge streng monoton fallend ist muss $a_1 = 4$ eine obere Schranke sein.

Behauptung: $a_n > 0$ (untere Schranke)

Induktionsanfang:

$n = 1:$ $a_1 = 4 > 0$

Induktionsschluss:

$n = n + 1:$ $a_{n+1} > 0$

$$a_n > 0$$

$$a_n^2 > 0$$

$$\frac{1}{2}a_n^2 > 0$$

$$\frac{1}{2}a_n^2 + 1 > 1$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}a_n^2 + 1} = a_{n+1} > 1 > 0$$

c) Konvergenz: Da die Folge streng monoton fallend ist und durch das Intervall $]0; 4]$ beschränkt ist, muss sie konvergent sein und der Grenzwert existieren.

d) Grenzwert: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\alpha^2 + 1}$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\alpha^2 + 1$$

$$\frac{1}{2}\alpha^2 = 1$$

$$a_1 = \sqrt{2} \vee a_2 = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \sqrt{2} \in]0; 4]$$

7) a) $42 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (1 + \sin(k^2))}{7 \cdot (2+k)^k}$

Wurzelsatz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k \cdot (1 + \sin(k^2))}{7 \cdot (2+k)^k}} = \left[\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot (2+k)} \right] = 0 < 1$$

b) $4 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{2k}} + 3 \cdot (k)^{-2} \right)$

Wurzelsatz

$$4 \cdot \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{2^{2k}} + 3 \cdot (k)^{-2} \right] = 4 \cdot \left[\sum_{k=2}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^k + \sum_{k=2}^{\infty} 3 \cdot \frac{1}{k^2} \right]$$

$$12 \cdot \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{4} \right)^0 - \left(\frac{1}{4} \right)^1 \right) + \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2} \right) \right]$$

$$12 \cdot \left[\frac{4}{3} - 1 - \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{6} - 1 \right] = 16 - 12 - 3 + 2\pi^2 - 12 = 2\pi^2 - 11$$

8) $f(x) = 2 \cdot \ln(\sqrt[3]{2-3x}) + 2x$

a) Extrempunkt:

$$f'(x) = \frac{-2}{2-3x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{2-3x} = -2 \Leftrightarrow 2 - 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-6}{(2-3x)^2} = -6 < 0 \Rightarrow HP\left(\frac{1}{3} / f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \ln\left(2 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow HP\left(\frac{1}{3} / \frac{2}{3}\right)$$

b) Definitionsbereich: $\sqrt[3]{2-3x} > 0 \Rightarrow \mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3}\right\}; \mathbb{W} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{2}{3}\right\}$

c) Taylorpolynom:

$$f(x) = 2 \cdot \ln \sqrt[3]{2-3x} + 2x = \frac{2}{3} \cdot \ln(2-3x) + 2x$$

$$f'(x) = \frac{-2}{2-3x} + 2 = -2 \cdot (2-3x)^{-1} + 2$$

$$f''(x) = -6 \cdot (2-3x)^{-2}$$

$$f'''(x) = -36 \cdot (2-3x)^{-3}$$

n	$f^n(-2)$	$(x+2)^n$	$n!$
0	$\frac{2}{3} \cdot \ln 8 - 4$	1	1
1	$\frac{7}{4}$	$x+2$	1
2	$-\frac{6}{64} = -\frac{3}{32}$	$(x+2)^2$	2
3	$-\frac{36}{512} = -\frac{9}{128}$	$(x+2)^3$	6

$$P_3(x, (-2)) = \frac{2}{3} \cdot \ln 8 - 4 + \frac{7}{4} \cdot (x+2) - \frac{3}{64} \cdot (x+2)^2 - \frac{3}{256} \cdot (x+2)^3 + R_3(x, (-2))$$